Ein Lehrmittel für Mathematik und ihre Anwendungen im Schwerpunktfach

Jan-Mark Iniotakis

KS Wohlen / MNG Rämibühl

Tag über Mathematik und Unterricht
KS Frauenfeld
11. September 2019

Inhalt

Inhalt

Ausgangslage

- SPF Physik & Anwendungen der Mathematik im Aargau:
  - im 3. und 4. Schuljahr Kurzzeitgymnasium
  - parallel zu GLF Mathematik und GLF Physik:

SPF AM: $3+3$ WL	und	GLF Math: $3+4$ WL
SPF Ph: $3+3$ WL	und	GLF Phys: $2+2$ WL

Ausgangslage

- SPF Physik & Anwendungen der Mathematik im Aargau:
  - im 3. und 4. Schuljahr Kurzzeitgymnasium
  - parallel zu GLF Mathematik und GLF Physik:

SPF AM: $3+3$ WL	und	GLF Math: $3+4$ WL
SPF Ph: $3+3$ WL	und	GLF Phys: $2+2$ WL

- SPAM an der KS Wohlen:
  - einzügig, ca. 12-18 Schülerinnen und Schüler pro Jahrgang

Wie kommt man von hier. . .

Gleichungen von Geraden

Die Parametergleichung der Geraden in der Ebene besitzt gegenüber der Parametergleichung im Raum keine z-Koordinate. Die Gerade in Fig. 1 durch die Punkte A(−3|0) und B(3|2) mit A als Stützpunkt und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor hat die Parameterform $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

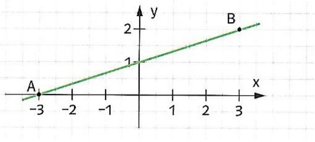


Fig. 1

Diese Gerade kann ebenfalls als Graph einer linearen Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + 1$ beschrieben werden oder, äquivalent dazu, durch die Koordinatengleichung $-x + 3y = 3$ (vgl. Kap. 8.1).

> Die Gleichung $\mathbf{a\,x + b\,y = c}$ heisst **Koordinatengleichung der Geraden** in der Ebene. Dabei ist mindestens einer der Koeffizienten a und b von 0 verschieden.

Die Gleichung der Form $x = c$ gehört zu einer Parallelen der y-Achse. In diesem Fall gibt es keine Funktionsgleichung der Geraden.

aus: Lambacher-Schweizer 9/10

. . . nach da?

1.4 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Wir wollen nun untersuchen, was sich über Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ aussagen lässt. Es geht also um die Zerlegung

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (x+iy \in \Omega).$$

Satz 1.10. *(CR Differentialgleichungen)*

i) *Sei $f = u + iv$* **analytisch** *im Gebiet Ω. Dann haben $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen nach x und nach y, und diese partiellen Ableitungen sind miteinander verbunden durch die* ***Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen***

$$\text{(CR)} \qquad u_x(x,y) = v_y(x,y); \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad x+iy \in \Omega.$$

aus: Da Lio, ETH-Skript „Komplexe Analysis“

Inhalt

Einige Leitgedanken

- inhaltlich-konzeptionelle Entwicklungen transparent machen, Intuition hinter fortgeschrittenen Konzepten vermitteln

Einige Leitgedanken

- inhaltlich-konzeptionelle Entwicklungen transparent machen, Intuition hinter fortgeschrittenen Konzepten vermitteln
- Lernmöglichkeit bieten, komplexere Inhalte nicht-linear zu erarbeiten

Einige Leitgedanken

- inhaltlich-konzeptionelle Entwicklungen transparent machen, Intuition hinter fortgeschrittenen Konzepten vermitteln
- Lernmöglichkeit bieten, komplexere Inhalte nicht-linear zu erarbeiten
- stark unterschiedlichen Lerngeschwindigkeiten der Schülerinnen und Schüler gerecht werden

Einige Leitgedanken

- inhaltlich-konzeptionelle Entwicklungen transparent machen, Intuition hinter fortgeschrittenen Konzepten vermitteln
- Lernmöglichkeit bieten, komplexere Inhalte nicht-linear zu erarbeiten
- stark unterschiedlichen Lerngeschwindigkeiten der Schülerinnen und Schüler gerecht werden
- Struktur modular mit Ausstiegsmöglichkeiten anlegen

Einige Leitgedanken

- inhaltlich-konzeptionelle Entwicklungen transparent machen, Intuition hinter fortgeschrittenen Konzepten vermitteln
- Lernmöglichkeit bieten, komplexere Inhalte nicht-linear zu erarbeiten
- stark unterschiedlichen Lerngeschwindigkeiten der Schülerinnen und Schüler gerecht werden
- Struktur modular mit Ausstiegsmöglichkeiten anlegen
- Anwendungsbeispiele zur Vertiefung der Theorie einsetzen

Einige Leitgedanken

- inhaltlich-konzeptionelle Entwicklungen transparent machen, Intuition hinter fortgeschrittenen Konzepten vermitteln
- Lernmöglichkeit bieten, komplexere Inhalte nicht-linear zu erarbeiten
- stark unterschiedlichen Lerngeschwindigkeiten der Schülerinnen und Schüler gerecht werden
- Struktur modular mit Ausstiegsmöglichkeiten anlegen
- Anwendungsbeispiele zur Vertiefung der Theorie einsetzen
- interdisziplinäre Anknüpfungspunkte zur Physik bieten

Einige inhaltliche Ziele im Überblick

Band I: „Komplexe Zahlen“

$\rightarrow$ Rechnen in $\mathbb{C}$, Fundamentalsatz, Tangentialabbildungen

Einige inhaltliche Ziele im Überblick

Band I: „Komplexe Zahlen“

$\rightarrow$ Rechnen in $\mathbb{C}$, Fundamentalsatz, Tangentialabbildungen

Band II: „Lineare Algebra“

$\rightarrow$ Matrizenrechnung, lineare Abbildungen, Diagonalisierung

Einige inhaltliche Ziele im Überblick

Band I: „Komplexe Zahlen“

$\rightarrow$ Rechnen in $\mathbb{C}$, Fundamentalsatz, Tangentialabbildungen

Band II: „Lineare Algebra“

$\rightarrow$ Matrizenrechnung, lineare Abbildungen, Diagonalisierung

Band III: „Funktionen in mehreren Dimensionen“

$\rightarrow$ Extrema, Jacobi-Matrizen, Weg- und Flächenintegrale, Satz von Gauss, einfache Potentialgleichungen

Einige inhaltliche Ziele im Überblick

Band I: „Komplexe Zahlen“
$\rightarrow$ Rechnen in $\mathbb{C}$, Fundamentalsatz, Tangentialabbildungen

Band II: „Lineare Algebra“
$\rightarrow$ Matrizenrechnung, lineare Abbildungen, Diagonalisierung

Band III: „Funktionen in mehreren Dimensionen“
$\rightarrow$ Extrema, Jacobi-Matrizen, Weg- und Flächenintegrale, Satz von Gauss, einfache Potentialgleichungen

Band IV: „Differentialgleichungen“
$\rightarrow$ Populationsdynamik, lineare DGL und DGL-Systeme

Inhalt

„Komplexe Zahlen“ – Inhaltsübersicht

Von i zum Fundamentalsatz:

1 Grundlagen
2 Rechnen im Komplexen
3 Die Polarform
4* Bsp: Wechselstromrechnung
5 Radizieren
6 Polynomiale Gleichungen

grün: Anwendungsbeispiele, *: optional

„Komplexe Zahlen“ – Inhaltsübersicht

Von i zum Fundamentalsatz:

1 Grundlagen
2 Rechnen im Komplexen
3 Die Polarform
4* Bsp: Wechselstromrechnung
5 Radizieren
6 Polynomiale Gleichungen

Komplexe Funktionen:

7* Geraden und Kreise
8* Lineare Abbildungen
9* Weitere Abbildungen
10* Komplexe Differenzierbarkeit
11* Bsp: Newton-Verfahren
12* Bsp: ebenes Dipolfeld

grün: Anwendungsbeispiele, *: optional

„Komplexe Zahlen“ – thematischer Aufbau I

Von i zum Fundamentalsatz:

1. Grundlagen
2. Rechnen im Komplexen
3. Die Polarform

} Grundrechenarten in Normal- und Polarform

„Komplexe Zahlen“ – thematischer Aufbau I

Von i zum Fundamentalsatz:

1 Grundlagen

2 Rechnen im Komplexen

3 Die Polarform

Grundrechenarten in Normal- und Polarform

4* Bsp: Wechselstromrechnung

optional – mit Physik

„Komplexe Zahlen“ – thematischer Aufbau I

Von i zum Fundamentalsatz:

1 Grundlagen
2 Rechnen im Komplexen
3 Die Polarform

} Grundrechenarten in Normal- und Polarform

4* Bsp: Wechselstromrechnung

} optional – mit Physik

5 Radizieren
6 Polynomiale Gleichungen

} Lösbarkeit aller polynomialen Gleichungen

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Von i zum Fundamentalsatz:

1 Grundlagen

2 Rechnen im Komplexen

3 Die Polarform

4* Bsp: Wechselstromrechnung

5 Radizieren

6 Polynomiale Gleichungen

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Von i zum Fundamentalsatz: Vorbereitung durch Leitfragen

1 Grundlagen

2 Rechnen im Komplexen

3 Die Polarform

4* Bsp: Wechselstromrechnung

5 Radizieren

6 Polynomiale Gleichungen

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Von i zum Fundamentalsatz: Vorbereitung durch Leitfragen

1 Grundlagen

$\longleftarrow$ Rechnen in Normalform in $\mathbb{C}$?

2 Rechnen im Komplexen

3 Die Polarform

4* Bsp: Wechselstromrechnung

5 Radizieren

6 Polynomiale Gleichungen

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Von i zum Fundamentalsatz: Vorbereitung durch Leitfragen

1 Grundlagen

← Rechnen in Normalform in $\mathbb{C}$?

2 Rechnen im Komplexen

← Geometrische Bedeutung der Multiplikation?

3 Die Polarform

4* Bsp: Wechselstromrechnung

5 Radizieren

6 Polynomiale Gleichungen

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Von i zum Fundamentalsatz: Vorbereitung durch Leitfragen

1 Grundlagen

← Rechnen in Normalform in $\mathbb{C}$?

2 Rechnen im Komplexen

← Geometrische Bedeutung der Multiplikation?

3 Die Polarform

← Radizieren in $\mathbb{C}$?

4* Bsp: Wechselstromrechnung

5 Radizieren

6 Polynomiale Gleichungen

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Von i zum Fundamentalsatz: Vorbereitung durch Leitfragen

1 Grundlagen

← Rechnen in Normalform in $\mathbb{C}$?

2 Rechnen im Komplexen

← Geometrische Bedeutung der Multiplikation?

3 Die Polarform

← Radizieren in $\mathbb{C}$?

4* Bsp: Wechselstromrechnung

5 Radizieren

← Bilder von Ursprungskreisen unter Potenzfunktion?

6 Polynomiale Gleichungen

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Beispiel: Vorbereitung Fundamentalsatz (§6) durch Leitfrage (§5):

Von der Leitfrage am Ende von §5...

Frage 5.13 : Wie sieht der Graph einer komplexen Potenzfunktion aus?

Untersuchen Sie den Graphen der Potenzfunktion $f : z \mapsto w = p(z) = z^3$:

- Betrachten Sie die Werte w_φ, welche einmal den Einheitskreis in der w-Ebene durchlaufen, während ihr Argument φ das Intervall $[0, 2\pi[$ durchläuft:

$$w_\varphi \ := \ e^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

  Wo liegen die zu jedem w_φ gehörenden Urbilder $f^{-1}(w_\varphi)$ in der z-Ebene?

- Betrachten Sie nun Werte z_φ, welche einmal den Einheitskreis in der z-Ebene durchlaufen, während ihr Argument φ das Intervall $[0, 2\pi[$ durchläuft:

$$z_\varphi \ := \ e^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

  Wo liegt das zu jedem z_φ gehörende Bild $f(z_\varphi)$ in der w-Ebene?

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Beispiel: Vorbereitung Fundamentalsatz (§6) durch Leitfrage (§5):

…über eine exemplarische Antwort für $f(z) = z^3$…

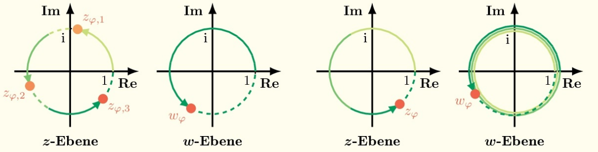


Abbildung 6.1: Die Potenzfunktion $f(z) = z^3$: dreifaches Urbild des in der Bildebene einfach durchlaufenen Einheitskreises (links), dreifach durchlaufenes Bild des in der Urbildebene einfach durchlaufenen Einheitskreises (rechts).

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung I

Beispiel: Vorbereitung Fundamentalsatz (§6) durch Leitfrage (§5):

...zur Beweisskizze des Fundamentalsatzes (§6):

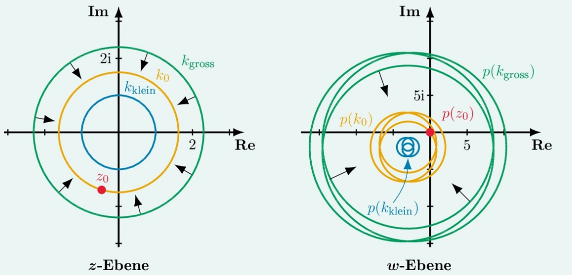


Abbildung 6.2: Windungsverhalten der Bildkurven am Beispiel $p(z) = z^3 + \frac{1}{2}z - 3 - 2i$

„Komplexe Zahlen“ – Anwendungsbeispiel als Transfer

Beispiel: Rechnen mit Wechselstrom (§4*) als Transferaufgabe

Von Zeigern ...

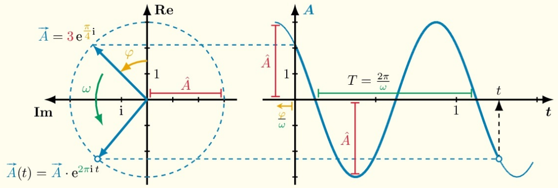


Abbildung 4.2: Zeigerdiagramm und zeitlicher Verlauf von $A(t) = 3\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

„Komplexe Zahlen“ – Anwendungsbeispiel als Transfer

Beispiel: Rechnen mit Wechselstrom (§4*) als Transferaufgabe

...und ihrer vektoriellen Addition...

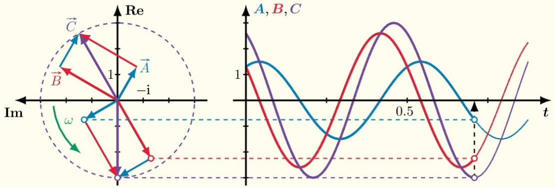


Abbildung 4.3: Die Summe $C(t)$ von $A(t) = \frac{3}{2}\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ und $B(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

„Komplexe Zahlen“ – Anwendungsbeispiel als Transfer

Beispiel: Rechnen mit Wechselstrom (§4*) als Transferaufgabe

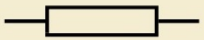
... über die physikalischen Grundlagen ...

Lineare Wechselstromwiderstände

- Ein **Ohm'scher Widerstand** R wirkt als reelle, von der Frequenz des Wechselstroms unabhängige Impedanz Z_R:

$$Z_R = \frac{\vec{U}_R(t)}{\vec{I}_R(t)} = R$$

Schaltzeichen:



$R = 1\,\Omega$

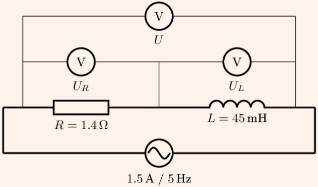
Der Ohm'sche Widerstand wird – wie bekannt – in der Einheit Ohm angegeben.

„Komplexe Zahlen“ – Anwendungsbeispiel als Transfer

Beispiel: Rechnen mit Wechselstrom (§4*) als Transferaufgabe

...zur Aufgabe – mit anschliessender Lösung:

In einem Stromkreis sind ein Ohm'scher Widerstand $R = 1.4\,\Omega$ und eine Spule der Induktivität $L = 45\,\mathrm{mH}$ seriell geschaltet. Der Stromkreis wird von harmonisch oszillierendem Wechselstrom mit der maximalen Stromstärke $\hat{I} = 1.5\,\mathrm{A}$ und der Frequenz $f = 5\,\mathrm{Hz}$ durchflossen.



a) Berechnen Sie mit Hilfe des Zeigers $\vec{I}$ der Stromstärke im gesamten Stromkreis die Zeiger $\vec{U}_R$ und $\vec{U}_L$ der entsprechenden Teilspannungen.

„Komplexe Zahlen“ – thematischer Aufbau II

Komplexe Funktionen:

7* Geraden und Kreise

8* Lineare Abbildungen

9* Weitere Abbildungen

Einführung und Visualisierung von Funktionen in $\mathbb{C}$

„Komplexe Zahlen“ – thematischer Aufbau II

Komplexe Funktionen:

7* Geraden und Kreise

8* Lineare Abbildungen

9* Weitere Abbildungen

Einführung und Visualisierung von Funktionen in $\mathbb{C}$

10* Komplexe Differenzierbarkeit

11* Bsp: Newton-Verfahren

12* Bsp: ebenes Dipolfeld

Aspekte komplexer Differenzierbarkeit

„Komplexe Zahlen“ – thematischer Aufbau II

Komplexe Funktionen:

7* Geraden und Kreise

8* Lineare Abbildungen

9* Weitere Abbildungen

Einführung und Visualisierung von Funktionen in $\mathbb{C}$

10* Komplexe Differenzierbarkeit

11* Bsp: Newton-Verfahren

12* Bsp: ebenes Dipolfeld

Aspekte komplexer Differenzierbarkeit

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung II

Beispiel: Einführung und Visualisierung von Funktionen in $\mathbb{C}$:

Von Geraden und Kreisen (§7). . .

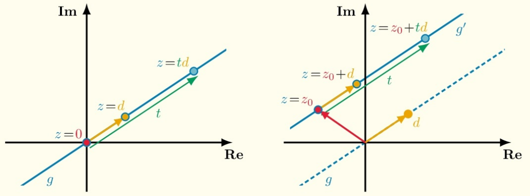


Abbildung 7.2: Parametrisierte Geraden mit Richtungszahl d durch 0 und z_0.

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung II

Beispiel: Einführung und Visualisierung von Funktionen in $\mathbb{C}$:

. . . zur Visualisierung komplex linearer Abbildungen (§8). . .

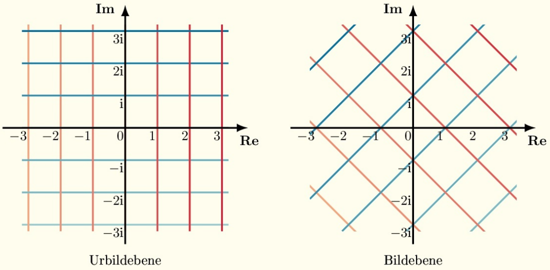


Abbildung 8.1: Cartesisches Koordinatengitter unter $f(z) = (1 + \mathrm{i})z + 1$.

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung II

Beispiel: Einführung und Visualisierung von Funktionen in $\mathbb{C}$:

...und weiterer komplexen Abbildungen (§9) wie $f(z) = z^2$...

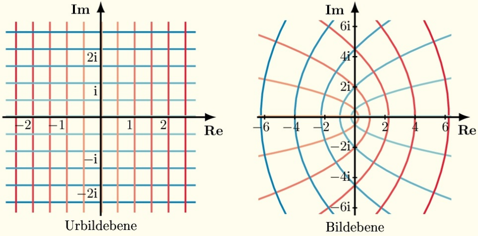


Abbildung 9.2: Bild eines cartesischen Koordinatengitters unter $f(z) = z^2$.

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung II

Beispiel: Einführung und Visualisierung von Funktionen in $\mathbb{C}$:

... oder wie $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

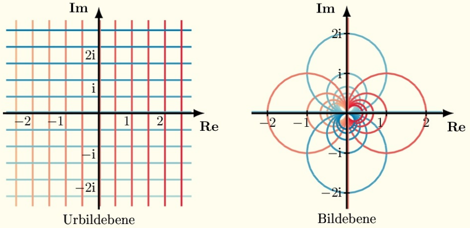


Abbildung 9.6: Bild eines cartesischen Koordinatengitters unter $f(z) = \frac{1}{z}$.

„Komplexe Zahlen“ – thematischer Aufbau II

Komplexe Funktionen:

7* Geraden und Kreise

8* Lineare Abbildungen

9* Weitere Abbildungen

Einführung und Visualisierung von Funktionen in $\mathbb{C}$

10* Komplexe Differenzierbarkeit

11* Bsp: Newton-Verfahren

12* Bsp: ebenes Dipolfeld

Aspekte komplexer Differenzierbarkeit

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung II

Beispiel: Aspekte komplexer Differenzierbarkeit:

Komplex lineare Abbildung = Drehstreckung um Fixpunkt (§8)

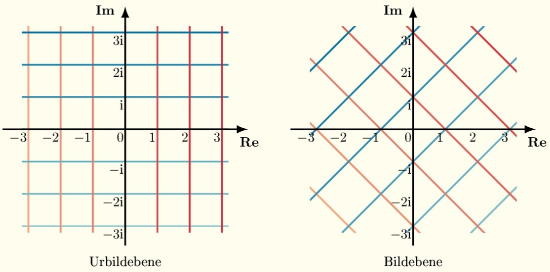


Abbildung 8.1: Cartesisches Koordinatengitter unter $f(z) = (1 + \mathrm{i})z + 1$.

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung II

Beispiel: Aspekte komplexer Differenzierbarkeit:

Funktion komplex differenzierbar
= lokal approximierbar durch lineare Tangentialabbildung (§10)

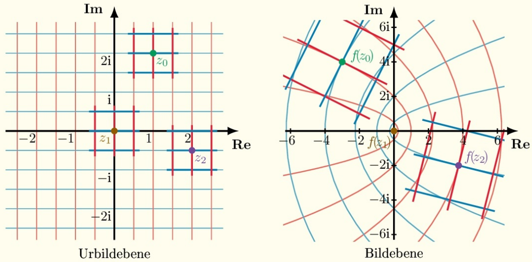


Abbildung 10.3: Lokale Approximationen von $f(z) = z^2$ durch Tangentialabbildungen.

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung II

Beispiel: Aspekte komplexer Differenzierbarkeit:

Newton-Verfahren: Nullstelle der approximierenden Tangentialabbildung als Näherung für Nullstelle der Funktion (§11)

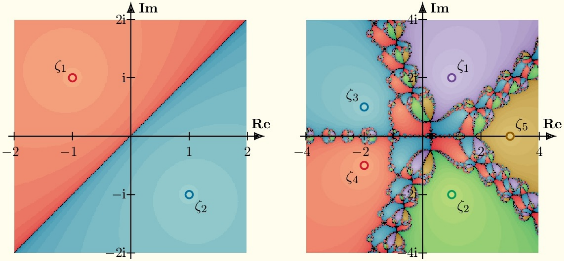


Abbildung 11.2: Newton-Fraktale für $f(z) = \mathrm{i}z^2 - 2$ und $f(z) = z^5 - z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 5z - 75$.

„Komplexe Zahlen“ – inhaltliche Entwicklung II

Beispiel: Aspekte komplexer Differenzierbarkeit:

Ebenes Dipolfeld: Erhalt orthogonaler Feldlinien-/Äquipotentialliniengitter unter Möbius-Transformationen (§12)

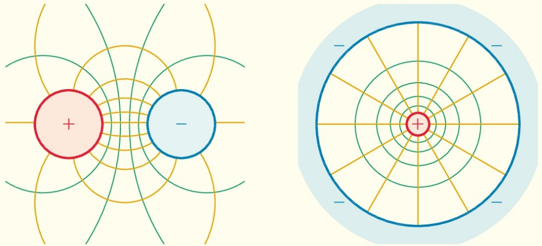


Abbildung 12.2: Orthogonales Gitter aus Feldlinien (gelb) und Äquipotentiallinien (grün) bei einem Dipolfeld (links) und einem radialsymmetrischen Feld (rechts).

Inhalt

Erfahrungen

- Als LP verantwortlich für mathematische „Bergführung“:
  - allen Schülerinnen und Schülern spannende mathematische „Bergtouren“ ermöglichen,

Erfahrungen

- Als LP verantwortlich für mathematische „Bergführung“:
  - allen Schülerinnen und Schülern spannende mathematische „Bergtouren“ ermöglichen,
  - sehr guten Schülerinnen und Schülern Möglichkeit und Material für eigene „Gipfelbesteigungen“ geben,

Erfahrungen

- Als LP verantwortlich für mathematische „Bergführung“:
  - allen Schülerinnen und Schülern spannende mathematische „Bergtouren“ ermöglichen,
  - sehr guten Schülerinnen und Schülern Möglichkeit und Material für eigene „Gipfelbesteigungen“ geben,
  - Basislager organisieren, Grenze des Zumutbaren im Blick und Ausstiegsmöglichkeiten parat haben.

Erfahrungen

- Nach gelegentlichen Anfangsmühen wachsender Stolz der Schülerinnen und Schüler auf das Erreichte.

Erfahrungen

- Nach gelegentlichen Anfangsmühen wachsender Stolz der Schülerinnen und Schüler auf das Erreichte.
- Enge Abstimmung zwischen Mathematik und Physik bietet beidseitig grossen Vorteil: Vertiefung und Viabilität

Erfahrungen

- Nach gelegentlichen Anfangsmühen wachsender Stolz der Schülerinnen und Schüler auf das Erreichte.
- Enge Abstimmung zwischen Mathematik und Physik bietet beidseitig grossen Vorteil: Vertiefung und Viabilität
- Äusserst positive Rückmeldungen von ehemaligen Schülerinnen und Schülern im Basisjahr.

Danksagung

Besonderer Dank an...

- Adrien Cornaz, Thomas Foertsch, Roger Keller
- Norbert Hungerbühler, Meike Akveld („ETH für die Schule“)
- Patrick Bütler und Sébastien Garmier (Graphiken)

Zeit für Diskussion